1) Calcul du volume de la boîte.

x est un nombre dans l'intervalle $[0;5]$ car $0 \leqslant x + x \leqslant 10$.

La base de la boîte est un carré

de côté

$$10 - x - x = 10 - 2x$$

et d'aire

$$(10-2x)^2 = 10^2 - 2\times 10 \times 2x + (2x)^2 = 100 - 40x + 4x^2 .$$

La hauteur de la boîte est x.

Par suite, le volume de la boîte est base fois hauteur soit

$$V(x) = (4x^2 - 40x + 100) \times x$$

$$= 4x^3 - 40x^2 + 100x .$$

2) Etude des variations de la fonction volume.

La fonction dérivée $V'(x)$ de la fonction volume

$$V(x)=4x^3-40x^2+100x$$

est

$$V'(x)=4(x^3)'-40(x^2)+100x'$$

$$=4\times 3x^2-40\times 2x+100\times 1$$

$$=12x^2-80x+100$$

$$=4\times\left(3x^2-20x+25\right).$$

Etudions le signe de $V'(x)$.

Le discriminant de $3x^2-20x+25$ est

$$\Delta=(-20)^2-4\times 3\times 25=100.$$

L'équation $3x^2-20x+25=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$

$$s=\frac{-(-20)-\sqrt{100}}{2\times 3}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}\sim 1{,}67$$

$$s'=\frac{-(-20)+\sqrt{100}}{2\times 3}=\frac{30}{6}=5.$$

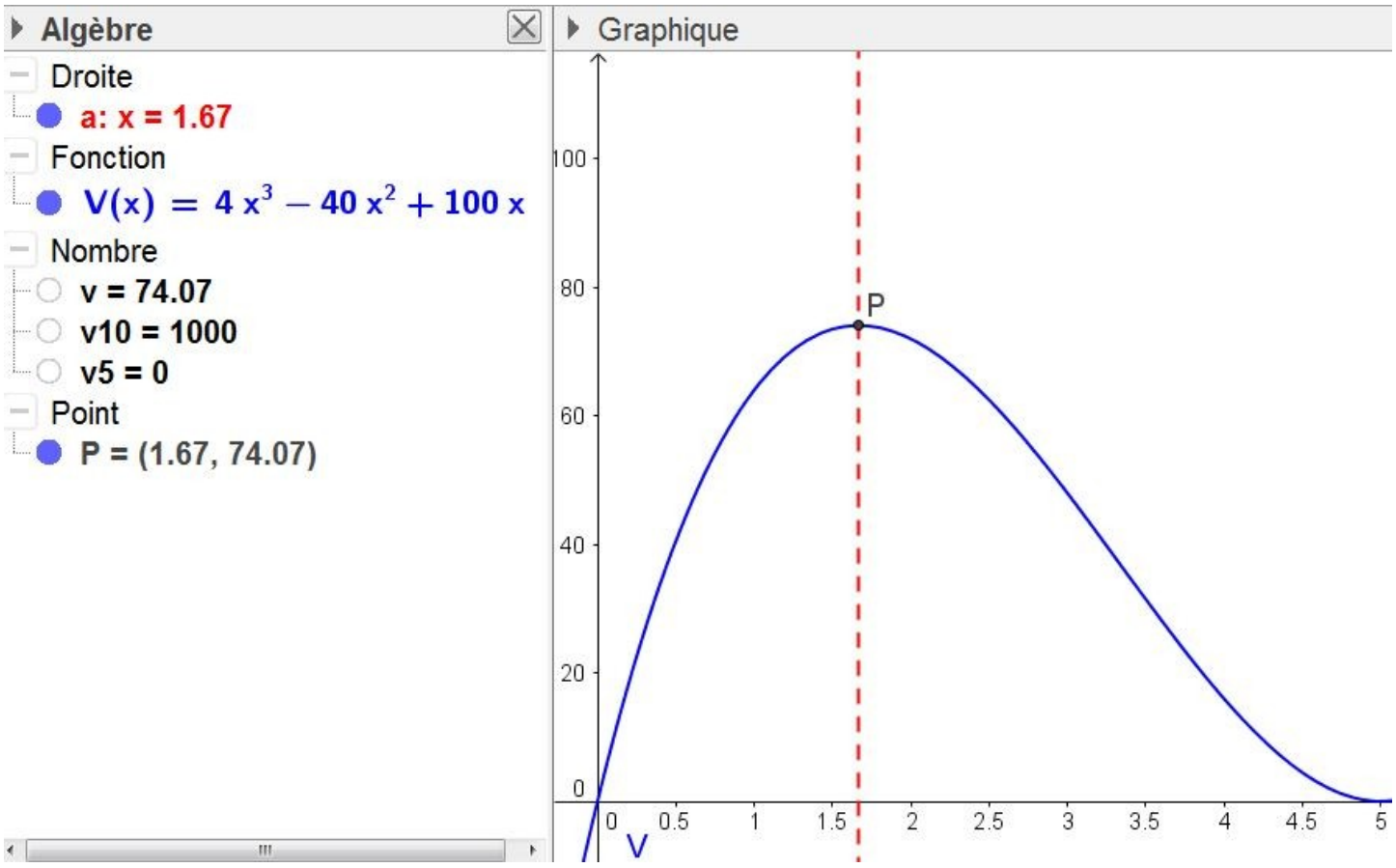
Le signe de $3x^2-20x+25$ sur $\mathbb{R}$ est

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		5		$+\infty$
$3x^2-20x+25$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite

x	0		$\frac{5}{3}$		5
$V'(x)$		$+$	0	$-$	0
$V(x)$	0	↗	$\sim 74{,}07$	↘	0

Vérification graphique



3) Conclusion

Le volume de la boîte est maximal lorsque $x=\frac{5}{3}$.

Dans ce cas,

la base de la boîte est un carré de coté $10-2x=\frac{20}{3}\sim 6{,}67$

la hauteur de la boîte est $x=\frac{5}{3}\sim 1{,}67$

le volume de la boîte est $\frac{20}{3}\times\frac{20}{3}\times\frac{5}{3}=\frac{2000}{27}\sim 74{,}07$.